КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
АЛЬ-ФАРАБИ

А.А. Темирбаев

СИНХРОНИЗАЦИЯ В ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМАХ

Сборник лекции для студентов и магистрантов
специальности «Радиотехника, электроника и телекоммуникации»

Алматы, 2024

Аннотация

Коллективная динамика в больших ансамблях или сетях связанных осцилляторов или автоколебательных элементов является одной из основных проблем в нелинейной динамике. Она важна как для теоретического понимания сложных процессов, так и для широкого спектра приложений в различных областях. В данном сборнике лекции изложены теоретические основы синхронизации и экспериментальные результаты автора по исследованию синхронизации в электронных ансамблях с глобальной и нелинейной связью.

Сборник лекции предназначен для студентов, желающих ознакомиться с физическим феноменом – синхронизация.

Лекция 6. Основные модели. Фазовые осцилляторы.

Цель лекции: Изучить фазовые осцилляторы, как одну из базовых моделей для исследования явления синхронизации. Ознакомиться с моделью глобально связанных осцилляторов. Изучить критерий синхронизации.

1. Фазовые осцилляторы.

Широкий класс динамических систем, которые имеют специальный интерес в нелинейной физике – фазовые системы или фазовые осцилляторы или ротаторы. Фазовой системой мы называет систему, которая имеет в качестве переменных только фазовую (угловую) переменную и ее производные по времени для непрерывных по времени систем и фазовую (угловую) переменную для дискретных по времени систем. Заметим, что фазовая переменная не всегда является фазой колебаний. Как будут показано ниже, для указанных систем является весьма типичным немонотонное изменение фазовой переменной.

Уравнение фазового осциллятора первого порядка (или же активный ротатор)

$$\dot{\varphi} + \sin\varphi = \omega, \tag{1}$$

где ω - положительный параметр описывает поведение фазового осциллятора первого порядка. В общем случае модель (1) называют “активный ротатор” или просто “ротатор”. В уравнении (1) при $\omega < 1$ существует два состояния равновесия: устойчивое – с координатой

$$\bar{\varphi}^s = \arcsin\omega \tag{2}$$

и неустойчивое с координатой

$$\bar{\varphi}^u = \pi - \arcsin\omega\,. \tag{3}$$

при $\omega = 1$ происходит бифуркация слияния состояний равновесия и имеет место одно состояние равновесия с координатой $\bar{\varphi} = \pi/2$. В области $\omega > 1$ состояний равновесия нет. И фаза растет неограниченно, т.е. имеют место вращения. Характер нарастания фазы зависит от параметра $\gamma = \omega - 1$. Если γ близко к нулю, то эволюция фазы $\varphi(t)$ представляет собой чередование сравнительно длинных участков практически не меняющейся фазы с короткими участками ее быстрого роста – скачками на 2π, которые называются фазовыми проскоками (см. рис.1 для $\omega = 1.01$). Как видно из рисунка в этом случае рост фазы неравномерен на различный временных интервалах. С ростом γ длина интервалов почти постоянной фазы становится меньше (рис.1). Если γ достаточно велико, то рост фазы почти линейный, т.е. фаза растет равномерно (рис.1 для $\omega = 2$).

Заметим, что уравнение (1) возникает во многих областях науки и техники: (а) *биология*: колебания в нейроне, светлячок, высвечивающий ритм; (б) *физика*: джозефсонский контакт; (в) *механика*: маятник в вязкой среде с постоянным вращающим моментом; (г) *электроника*: системы фазовой автоподстройки частоты.

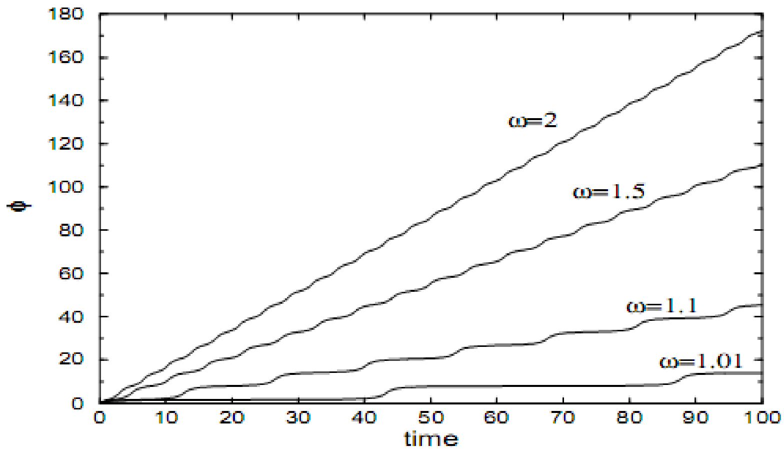


Рис.1. Равномерный и неравномерный рост фазы в системе (1) для различных ω

2. Критерий синхронизации

Определим условия, выполнение которых будет свидетельствовать о существовании синхронных режимов. Поскольку рассматривается сеть или ансамбль, в которой каждый i-тый элемент имеет *собственный характерный временной масштаб* T_i или *собственную характерную частоту* ($\Omega_i = 2\pi/T_i$) и каким-либо способом для него определена фаза колебаний φ_i, то используется критерий *частотного* – и более сильный критерий – *фазового захвата или подстройки (синхронизации)*.

Считается, что два произвольных (не обязательно соседних) элемента i и j m:n синхронизованы, если

$$m\Omega_i = n\Omega_j \tag{4}$$

где m и n – целые числа.

Помимо этого критерия *захвата частот* другой – критерий m:n синхронизации между элементами i и j – это *захват фаз*:

(а) точный (строгий) захват фаз (разность фаз постоянна) – выполнение для любого t условия

$$\left| m\varphi_i(t) - n\varphi_j(t) \right| = Const. \tag{5}$$

(б) неточный (нестрогий) захват фаз (разность фаз не постоянна, но ограничена) – выполнение для любого t условия

$$\left| m\varphi_i(t) - n\varphi_j(t) - Const \right| < 2\pi, \qquad (6)$$

т.е. критерий отсутствия проскоков (скачков на 2π) разности фаз.

Если эти условия выполнены для всех элементов сети, то мы будем говорить о *глобальной синхронизации*. Если они выполнены только для некоторых элементов, то имеет место *кластерная* или *частичная синхронизация.*

3. Модель Курамото. Ансамбль глобально связанных осцилляторов

Явление синхронизации было открыто в 1665 году великим голландским физиком Христианом Гюйгенсом. Он обнаружил, что маятники двух часов после того, как их повесят рядом на одну стену, начинают спустя некоторое время качаться полностью синхронно. Когда эти часы помещены на противоположные стены комнаты, явления синхронизации не наблюдается. Очевидно, что синхронизацию колебаний маятников этих часов можно объяснить их влиянием друг на друга через невидимую на глаз вибрацию стены, на которой они висят.

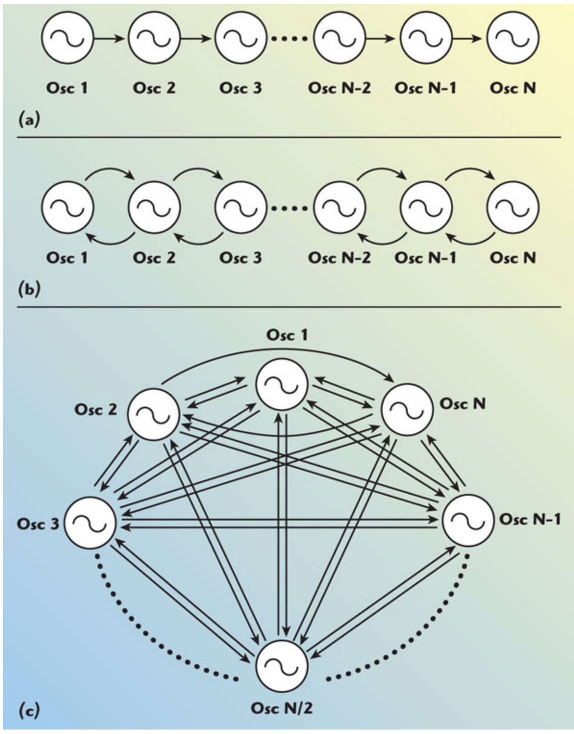
Синхронизацией называется подстройка ритмов автоколебательных систем за счет слабого взаимодействия между ними. Другими словами под синхронизацией колебаний понимаем согласование частот, фаз или других характеристик сигналов, генерируемых взаимодействующими колебательными системами.

В простейшем случае две автоколебательные системы с изначально различными частотами и независимыми фазами, будучи слабо связанными, подстраивают свои ритмы и начинают осциллировать на одной частоте, при этом возникает определенное устойчивое соотношение между фазами этих двух осцилляторов.

4. Разные типы взаимодействий. Концепция среднего поля

Синхронизация была изначально открыта в системе двух связанных осцилляторов. В общем случае взаимодействие двух систем несимметрично: либо один осциллятор мощнее другого, либо они влияют друг на друга в разной степени, либо и то, и другое. Если воздействие в одном направлении существенно сильнее, чем в другом, то мы имеем дело с частным случаем синхронизации внешней силой. В этом случае частота системы подтягивается к частоте воздействия. Основная особенность взаимного воздействия - это то, что меняются частоты обоих осцилляторов. Существуют множество разных моделей связи: модели с односторонней и двухсторонней связью, модели с короткой связью, где каждый осциллятор связан только с несколькими соседями, модели с иерархической связью, модели со случайными связами и.т.д. Некоторые из-них показаны на рисунке 10.

Очень большой интерес представляет исследование явления синхронизации в больших ансамблях осцилляторов, в которых каждый элемент взаимодействует со всеми остальными. Такую связь обычно называют глобальной или связью типа “каждый с каждым”. В качестве характерных примеров можно привести синхронное испускание световых импульсов популяцией светлячков и синхронные аплодисменты в большой аудитории. Действительно, каждый светлячок подвержен влиянию светового поля, которое создается всей популяцией. Точно так же, каждый аплодирующий слышит звуки, производимые всеми остальными сидящими в зале. Чтобы понять явление коллективной синхронности, мы должны рассматривать ансамбль неидентичных осцилляторов поскольку в природе не могут быть абсолютно одинаковых индивидуумов. Известно, что такие системы



(a) – односторонняя связь, (b) – двухсторонняя связь (c) – глобальная связь.

Рис. 2 – Система N-связанных осцилляторов.

могут синхронизоваться, если расстройка не слишком велика, и, следовательно, мы можем ожидать, что синхронизация может охватить всю популяцию, или, по крайней мере, большую ее часть. В качестве вспомогательного шага мы перерисуем рисунок 2 (c) в эквивалентном виде, показанном на рисунке 3(b). Здесь мы заменили сумму сил, действующих на осциллятор со стороны всех остальных, одной силой, действующей со стороны всего ансамбля. Действительно, можно сказать, что на каждый осциллятор действует сила, пропорциональная сумме колебаний всех осцилляторов в ансамбле. Схема на рисунке 3(b) сильно напоминает случай, когда на ансамбль действует общая внешняя сила. Действительно, в обоих случаях на все осцилляторы действует общая сила, и, как известно, эта сила может захватить многие осцилляторы, если их частоты близки. Проблема только в том, что, в случае глобальной связи, эта сила, или среднее поле, не задана изначально, а возникает из-за взаимодействия в ансамбле. Эта сила определяет, синхронизована ли системы, но сама она зависит от их колебаний – это типичный пример *самоорганизации*. Самоорганизация – это возникновение упорядоченных структур в открытых системах обменивающихся с внешней средой энергией, массой и информацией. Другое определение, но к тому же явлению – самоорганизации звучит так: «самоорганизация – это возникновение порядка из хаоса». Это явление лежит в основе физических, биологических, а также экономических и социальных процессов. Наука, занимающаяся всеми этими вопросами, получила название *синергетика*.

Теперь вернемся к рисунку 3. Чтобы качественно объяснить возникновение силы между осцилляторами следует рассмотреть эту проблему самосогласованно.

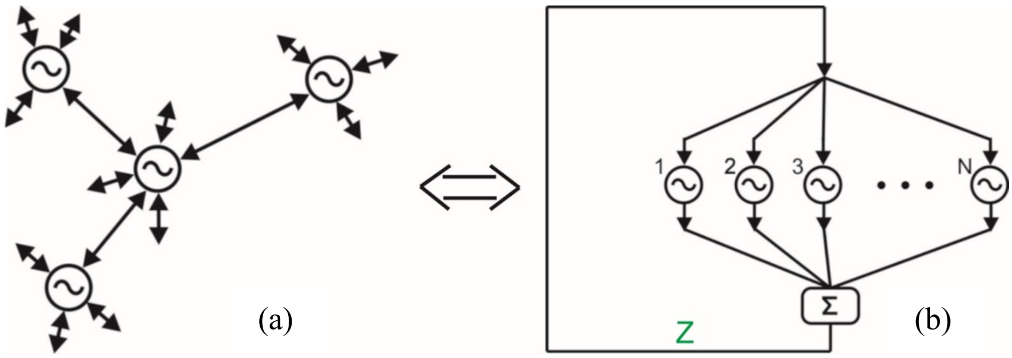


Рис.3 – (a) Каждый осциллятор в большой популяции взаимодействует со всеми остальными. Такое взаимодействие называется глобальной, или “каждый с каждым”, связью. (b) Эквивалентное представление: каждый элемент ансамбля подвержен воздействию среднего поля, которое создается всеми элементами.

Предположим сначала, что среднее поле равно нулю. Тогда все элементы в ансамбле осциллируют независимо, вклады каждого осциллятора в среднее поле практически компенсируются. Даже если частоты этих колебаний идентичны, но фазы независимы, среднее от выходов всех элементов ансамбля мало по сравнению с амплитудой одиночного осциллятора. Таким образом, асинхронное состояние с нулевым полем удовлетворяет условию самосогласованности.

Далее, чтобы продемонстрировать, что синхронизация в ансамбле возможна, предположим, что среднее поле не нулевое. Тогда, естественно, оно захватит по крайней мере часть популяции, выходы этих захваченных элементов будут суммироваться когерентно, и среднее поле получится ненулевым, как и предполагалось. Какое из этих двух состояний – синхронное или асинхронное – будет реализовано, или, другими словами, какое из них устойчиво, зависит от степени взаимодействия каждой пары и от того, насколько различаются элементы ансамбля. Сочетание этих двух факторов – силы связи и распределения автономных частот – определяют также, как много осцилляторов будет синхронизовано и, следовательно, как велико будет среднее поле.

5. Заключение

Переход Курамото в глобально связанных осцилляторах представляет собой универсальный принцип, объясняющий, как синхронизация может возникнуть в системе разнородных осцилляторов под действием глобальных связей. Эта модель имеет широкое применение, от нейробиологии до инженерии и сетевого анализа, и продолжает служить основой для исследований синхронизации в сложных системах.

Список использованных источников

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J., Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.-508p.

2. Rosenblum M., Pikovsky A., Self-organized quasiperiodicity in oscillator ensemble with global nonlinear coupling //Phys. Rev. Lett.- 2007.-Vol. 98, №6.- P.064101(4).

3. Греченко Т.Н., Психофизиология: учебное пособие. – М.: Гайдарики, 1999. – 358 с.

4. Aschoff J., Daan S., Groos G.A., Vertabrate Circadian Sysytems. Structure and Physihology.- Berlin: Springer,1982.-250p.

5. Moore R.Y., A clock for the ages //Science.- 1999.-Vol. 284.-P.2102-2103.

6. Golomb D., Hansel D., Mato G., Mechanisms of synchrony of neural activity in large networks in Neuroinformatics and Neural Modeling, ser. Handbook of Biological Physics, F. Moss and S. Gielen, Eds. Amsterdam: Elsevier, 2001.- Vol. 4, pp. 887–968